FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
FACHBEREICH WIRTSCHAFTS-
WISSENSCHAFTEN

Bachelorprüfung Statistik (RUW-2172), Wintersemester 2020/21

Liebe Studierende,

markieren Sie bitte bei den Single-Choice-Fragen Ihre Antwort auf dem Antwortbogen am Ende des Gehefts in der folgenden Weise: ○⊗○ .
Wenn Sie eine Antwort korrigieren möchten, füllen Sie bitte die **falsch** markierte Antwort vollständig aus, ungefähr so: ○●⊗ .
Die Fünfecke beziehen sich auf den Freitextteil und werden nur von der Korrektorin bzw. dem Korrektor ausgefüllt; wenn Sie ein Fünfeck selbst markieren, erhalten Sie für die betreffende Frage 0 Punkte.

Bitte füllen Sie folgende Angaben deutlich lesbar aus:

Nachname : ______________________________

Vorname : ______________________________

Matrikelnummer : ______________________________

Studiengang : ______________________________

Raum, Platz : ______________________________

Prüfer : Prof. Dovern

WICHTIG: Bitte kreuzen Sie Ihre Matrikelnummer auch auf dem Antwortbogen an!

Nachfolgende Angaben sind nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgaben 1+2: Teilnote:

Aufgabe 3: Teilnote:

Gesamtnote:

Unterschrift Prüfer:

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Das Geheft **muss** zusammen bleiben!
- Die Klausur besteht aus einem **Single-Choice** und einem **Freitextteil**.
- **Single-Choice-Teil (Aufgaben 1 und 2)**
  - Der Single-Choice-Teil umfasst 27 Single-Choice-Fragen.
  - Verwenden Sie für Ihre Antworten zu den Single-Choice-Fragen ausschließlich den Single-Choice-Antwortbogen am Ende des Gehefts. **Einträge in der Aufgabenstellung werden nicht gewertet!**
  - Beschriften Sie den Antwortbogen deutlich lesbar mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer, und kreuzen Sie Ihre Matrikelnummer zusätzlich an!
  - Verwenden Sie auf dem Antwortbogen bitte einen **dunklen Kugelschreiber**!
- **Freitextteil (Aufgabe 3)**
  - Der Freitextteil umfasst 12 offene Aufgaben, die in den Lösungsfeldern in **diesem Geheft** zu beantworten sind.
  - Schreiben Sie Ihre Freitextantworten **lesbar**.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:**
  - Nicht-programmierbarer Taschenrechner
  - Die vom Lehrstuhl offiziell herausgegebene Formelsammlung, 2. bis 4. Auflage, ohne weitere Eintragungen oder Markierungen, mit Ausnahme von farblichen Hinterlegungen von Textpassagen und/oder Formeln bzw. unbeschriebenen Post-Its
  - Cheat Sheet für Basics in R, das über StudOn bereitgestellt wurde, ohne weitere Eintragungen oder Markierungen, mit Ausnahme von farblichen Hinterlegungen von Textpassagen und/oder Befehlen

Viel Erfolg!

Bachelorprüfung Statistik, WiSe 2020/21

Aufgabe 1: Single-Choice-Fragen

Bitte vergessen Sie nicht, Ihre Antworten auf den Antwortbogen zu übertragen und dort auch Ihren Namen, Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer anzugeben.

Hinweis: Aufgabe 1 besteht aus 18 Teilaufgaben, bei denen jeweils 3 Punkte erreicht werden können. Jede Frage bietet mehrere Antwortmöglichkeiten, von denen **jeweils nur eine korrekt ist**. Kreuzen Sie jeweils die korrekte Antwort **auf dem Antwortbogen** an. Beachten Sie, dass es **keinen Punktabzug für falsch beantwortete Fragen** gibt.

1.1 Welche Behauptung über Konfidenzintervalle ist allgemein korrekt?

- **A** Das Konfidenzniveau gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der der wahre Parameterwert in einem realisierten Konfidenzintervall liegt.
- **B** Der zu schätzende Parameter stellt eine Konstante dar; die Grenzen eines Konfidenzintervalls sind dagegen ex ante Zufallsvariablen.
- **C** Schwankungs- und Konfidenzintervalle unterscheiden sich in ihrer inhaltlichen Interpretation nicht, da beide Intervalle feste Grenzen haben.
- **D** Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ ist der Anteil an realisierten Konfidenzintervallen, die den wahren Parameterwert einschließen, mit $\alpha \cdot 100\%$ sehr klein.
- **E** Konfidenzintervalle können nur bei der Schätzung von Maßzahlen der Lage verwendet werden.

Ihr Freund ist begeisterter Basketballfan und trainiert sogar eine Kreisligamannschaft. Er behauptet, dass die Sprintfähigkeit seines gesamten Teams sehr homogen ist, so dass die Varianz der normalverteilten Sprintgeschwindigkeit der Spieler X höchstens 2.25 sei.

Sie sind vom Gegenteil überzeugt und wollen dies mit einem Hypothesentest überprüfen. Dafür betrachten Sie die 12 Sprintgeschwindigkeiten der Spieler, die unabhängig und identisch normalverteilt sind.

1.2 Wie lauten die korrekten Null- und Alternativhypothesen?

A H_0: $\sigma^2 = 2.25$, H_1: $\sigma^2 \neq 2.25$
B H_0: $\sigma^2 \geq 2.25$, H_1: $\sigma^2 < 2.25$
C H_0: $\sigma^2 \leq 2.25$, H_1: $\sigma^2 > 2.25$
D H_0: $\sigma^2 \neq 2.25$, H_1: $\sigma^2 = 2.25$
E H_0: $\sigma^2 \geq 2.25$, H_1: $\sigma^2 \neq 2.25$

1.3 Sie notieren sich in der nächsten Trainingseinheit die 12 Sprintgeschwindigkeiten der Spieler und erhalten als Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}^2 = 2.1818$. Wie lautet die Teststatistik für den obigen Test?

A 11.6363
B 7.2213
C 10.8320
D 25.4034
E 10.6666

Bei einer Erhebung wurden 16 Bachelor-Absolventen, $i = 1, \ldots, 16$, gefragt, wie viele Semester sie gebraucht haben, um ihr Studium abzuschließen (Merkmal B). Die Ergebnisse liegen in der folgenden Urliste vor:

i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
b_i:	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	9	9	10

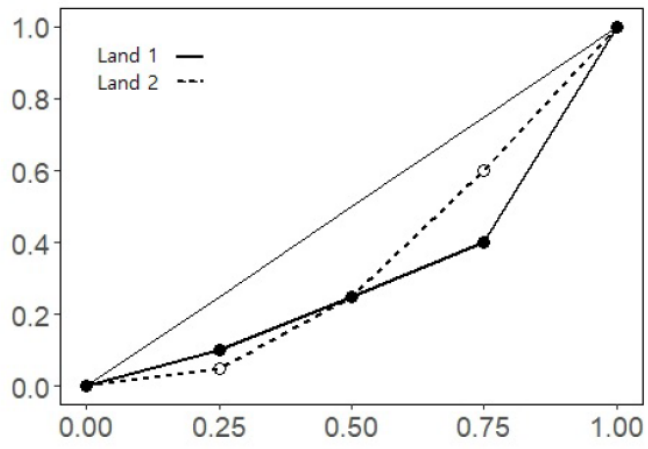
1.4 Welche Werte nehmen die beobachtete Spannweite s_M und das obere Quartil $x_{0.75}$ an?

A $s_M = 6$ und $x_{0.75} = 8$
B $s_M = 4$ und $x_{0.75} = 8$
C $s_M = 4$ und $x_{0.75} = 7$
D $s_M = 6$ und $x_{0.75} = 7$
E $s_M = 5$ und $x_{0.75} = 8$

1.5 Gegeben sei eine Urliste mit Beobachtungen x_i für $i = 1, \ldots, n$ sowie $y_i = a + bx_i$, wobei a und b reelle Zahlen sind. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein korrekt?

A $\bar{x} = a + b\bar{y}$
B $\bar{y} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}\bar{x}$
C $\bar{y} = a + b\bar{x}$
D $\bar{y} = b^2\bar{x}$
E $\bar{x} = a - b\bar{y}$

Das nachfolgende Schaubild zeigt die Lorenzkurven der Vermögensverteilungen in zwei Ländern. Im Folgenden sei G_i der Gini-Koeffizient für Land i, $i = 1, 2$.



1.6 Welche Aussage über die dargestellten Vermögensverteilungen ist korrekt?

A Die ärmsten 25% der Personen in Land 1 besitzen weniger Vermögensanteile als jene in Land 2.

B $G_1 > G_2$

C $G_1 = G_2$

D Die reichsten 25% der Personen in Land 2 besitzen mehr Vermögensanteile als jene im Land 1.

E $G_1 < G_2$

Eine zufällige Stichprobe von $n = 100$ Kunden bzw. Kundinnen eines Investmentfondsanbieters wird nach dem Anlegertyp, d.h. Privatanleger (P) oder institutioneller Anleger (I), sowie nach dem bevorzugten Anlagetyp sortiert.

Die einzelnen Investoren verfolgen unterschiedliche Investitionsstrategien. Sie verteilen ihre Vermögen auf drei Anlageklassen: Aktien (A), Bargeld (B) und Rohstoffe (R).

In der folgenden Kontingenztabelle fehlt eine Häufigkeit.

	Aktien (A)	Bargeld (B)	Rohstoffe (R)
Privatanleger (P)	26	?	11
Institutioneller Anleger (I)	24	13	9

1.7 Wir groß ist der Anteil der Investoren, die Privatanleger sind und Bargeld als bevorzugten Anlagetyp haben?

A $h(P|B) = 0.566$

B $h(P, B) = 0.170$

C $h(B|P) = 0.314$

D $h(B, P) = 0.130$

E $h(P|B) = 0.170$

1.8 Wie groß ist der Anteil der Privatanleger unter denjenigen, die ihr Vermögen in Rohstoffe investieren?

A $h(P, R) = 0.110$

B $h(P|R) = 0.550$

C $h(R|P) = 0.204$

D $h(P|R) = 0.450$

E $h(R|P) = 0.196$

Zwei Würfel werden gewürfelt. Die Ergebnismenge E kann wie folgt geschrieben werden:

$E = \{ (1,1), (1,2), \ldots, (6,6) \}$

Betrachten Sie nun das folgende Ereignis:

A = "Mindestens einer der Würfel zeigt eine 1"

Hinweis: Jedes Ergebnis aus E ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/36 gleich wahrscheinlich.

1.9 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$?

A $P(A) = 11/36$

B $P(A) = 1/18$

C $P(A) = 7/36$

D $P(A) = 1/3$

E $P(A) = 1/6$

1.10 Eine Urne enthält zehn von 1 bis 10 durchnummerierte Kugeln. Wie viele Variationen gibt es, wenn vier Kugeln ohne Zurücklegen gezogen wird?

A 10000

B 5040

C 210

D 288

E 1048576

Betrachten Sie die Zufallsvariable Y mit folgender Dichtefunktion:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot y + \frac{1}{4} & \text{für } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1.11 Welchen Wert hat der Erwartungswert von Y?

A 1.167
B 0.667
C 0.500
D 1.500
E 2.500

Eine Maschine befüllt leere Flaschen mit einer Flüssigkeit. Der Inhalt einer Flasche in Millilitern kann als normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $500ml$ und einer Standardabweichung von $10ml$ angesehen werden.

1.12 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche mindestens $499ml$ aber höchstens $501ml$ Inhalt hat?

A 7.96%
B 9.94%
C 11.92%
D 13.57%
E 5.98%

1.13 Die Pearson-Korrelation zwischen zwei Merkmalen A und B beträgt 0.4 bei einer Kovarianz von 0.5. Die Varianz von Merkmal B ist 2. Wie hoch ist die Varianz von Merkmal A?

A 1.28
B 1.13
C 0.63
D 0.78
E 0.88

1.14 Eine *i.i.d.*-Stichprobe vom Umfang $n = 14$ wird aus einer normalverteilten Grundgesamtheit entnommen, welche durch die Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\mu_X = 60$ und Standardabweichung $\sigma_X = 7$ charakterisiert wird. Welcher Verteilung folgt das Stichprobenmittel?

A $\overline{X} \sim \mathcal{N}(60, 49)$
B $\overline{X} \sim \mathcal{N}(60, 7)$
C $\overline{X} \sim \mathcal{N}(60, 3.5)$
D $\overline{X} \sim \mathcal{N}(60, 0.5)$
E $\overline{X} \sim \mathcal{N}(60, 98)$

Mittels einer statistischen Untersuchung möchte die Bundesregierung einen Einblick über die Qualität der betrieblichen Gesundheitsförderung in Unternehmen gewinnen. Gemäß der Empfehlung 2003/361/EG der Europäischen Union ist die Unternehmensgröße in Abhängigkeit von der Anzahl der Beschäftigten wie folgt definiert:

Typ	Anzahl Beschäftigte
Kleinstunternehmen	< 10
Kleine Unternehmen	< 50
Mittlere Unternehmen	< 250
Große Unternehmen	≥ 250

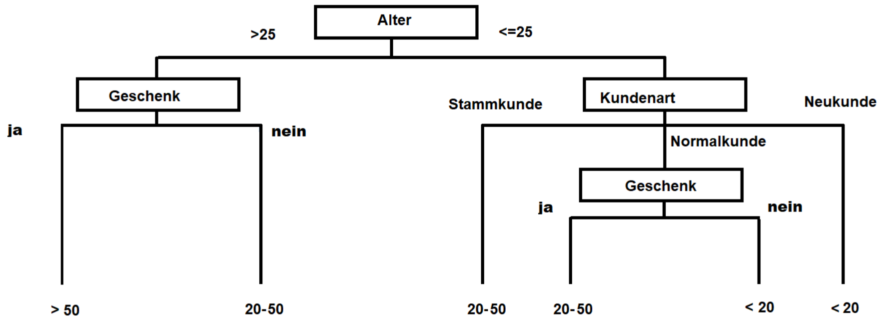
1.15 Es wird in jeder Größenklasse eine einfache Zufallsstichprobe gezogen. Anschließend werden die Daten zur Auswertung zusammengeführt. Wie nennt man dieses Stichprobenverfahren?

A Clusterstichprobe bzw. Klumpenstichprobe
B Einfache Zufallsstichprobe
C Geschichtete Stichprobe
D Quotenstichprobe
E Typische Stichprobe

1.16 Gegeben sei eine unabhängig und identisch verteilte Zufallsstichprobe. Welche der folgenden Aussagen ist **nicht** korrekt?

A Der Zentrale Grenzwertsatz besagt, dass das Stichprobenmittel für große n approximativ normalverteilt ist.
B Für sehr große n ist die Verteilung des Stichprobenmittels gemäß des Zentralen Grenzwertsatzes symmetrisch.
C Das schwache Gesetz der großen Zahlen besagt, dass die Varianz des Mittelwertschätzers für $n \to \infty$ gegen die Populationsvarianz konvergiert.
D Der Zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Summe der Stichprobenvariablen asymptotisch normalverteilt ist.
E Gemäß des Hauptsatzes der Statistik liegt die empirische Verteilungsfunktion bei einem steigenden Stichprobenumfang immer näher an der theoretischen Verteilungsfunktion.

Der Betreiber eines Online-Weinhandels möchte vorhersagen, für welche Weinkategorie sich seine Kunden und Kundinnen beim nächsten Kauf entscheiden. Dabei gibt es drei Preiskategorien (unter 20 Euro, 20-50 Euro und über 50 Euro). Die Vorhersage basiert auf den Merkmalen "Alter des Käufers", "Weinflasche soll als Geschenk verpackt werden" und "Kundenart" (Neukunde, Normalkunde oder Stammkunde). Zur Prognose verwendet er den folgenden Entscheidungsbaum:



1.17 Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

A Für einen 28 Jahre alten Käufer, der den Wein mit Geschenkverpackung kauft, wird ein Preis von über 50 Euro prognostiziert.
B Für einen 20 Jahre alten Neukunden wird ein Preis von unter 20 Euro prognostiziert.
C Für einen 60 Jahre alten Käufer, der den Wein nicht geschenkverpackt kauft, wird ein Preis von 20-50 Euro prognostiziert.
D Für einen 33 Jahre alten Käufer, der den Wein nicht geschenkverpackt kauft, wird ein Preis von 20-50 Euro prognostiziert.
E Für einen 18 Jahre alten Normalkunden, der den Wein mit Geschenkverpackung kauft, wird ein Preis von unter 20 Euro prognostiziert.

1.18 Welches der folgenden Merkmale ist **nicht** ordinalskaliert?

A Militärischer Rang (z.B. General, Leutnant oder Feldwebel)
B Produktzufriedenheit (z.B. zufrieden oder unzufrieden)
C Lawinengefahr (z.B. groß, erheblich oder gering)
D Anzahl der Geschwister (z.B. ein, zwei oder drei Geschwister)
E Schärfegrad von Lebensmitteln (z.B. scharf oder mild)

Bitte vergessen Sie nicht, Ihre Antworten auf den Antwortbogen zu übertragen und dort auch Ihren Namen, Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer anzugeben.

Aufgabe 2: Single-Choice-Fragen zu R

Bitte vergessen Sie nicht, Ihre Antworten auf den Antwortbogen zu übertragen und dort auch Ihren Namen, Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer anzugeben.

Hinweis: Aufgabe 2 besteht aus 9 Teilaufgaben, bei denen jeweils 3 Punkte erreicht werden können. Jede Frage bietet mehrere Antwortmöglichkeiten, von denen **jeweils nur eine korrekt ist**. Kreuzen Sie jeweils die korrekte Antwort **auf dem Antwortbogen** an. Beachten Sie, dass es **keinen Punktabzug für falsch beantwortete Fragen** gibt.

2.1 Es sei X eine mit den Parametern $n=10$ und $p=0.6$ binomialverteile Zufallsvariable. Mit welchem Befehl können Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X=4)$ in R berechnen?

A dbinom(x = 4, size = 10, prob = 0.6)
B dbinom(x = 4, size = 0.6, prob = 10)
C dbinom(x = 0.6, size = 4, prob = 10)
D pbinom(q = 4, size = 10, prob = 0.6)
E pbinom(q = 10, size = 0.6, prob = 4)

2.2 Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der eingehenden E-Mails pro einstündigem Zeitintervall. Nehmen Sie an, dass X einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda=3$ folgt. Mit welcher Befehlssequenz können Sie die Wahrscheinlichkeit mit der innerhalb einer Stunde mindestens eine aber höchstens drei E-Mails eingehen **nicht** bestimmen?

A dpois(x = 1, lambda = 3) + dpois(x = 2, lambda = 3) + dpois(x = 3, lambda = 3)
B ppois(q = 3, lambda = 3) - ppois(q = 0, lambda = 3)
C ppois(q = 4, lambda = 3) - dpois(x = 4, lambda = 3) - ppois(q = 0, lambda = 3)
D ppois(q = 3, lambda = 3) - ppois(q = 1, lambda = 3) + dpois(x = 1, lambda = 3)
E ppois(q = 3, lambda = 3) - ppois(q = 1, lambda = 3)

2.3 Welchen Output zeigt die nachfolgende for-Schleife in der R-Konsole an?

```
for(i in 1:5){
   j <- i+3
   k <- j^2
   print(k)
}
```

A 4 5 6 7 8
B 1 2 3 4 5
C 16 25 36 49 64
D 1 4 9 16 25
E 16 18 20 22 24

2.4 Mit welchem Befehl können Sie in R eine *i.i.d.*-Stichprobe der Größe $n = 5$ aus den ganzen Zahlen zwischen 1 und 8 ziehen?

A sample(x = seq(from = 1, to = 8, by = 1), size = 5, replace = TRUE)
B sample(x = seq(from = 1, to = 8, by = 1), size = 5, replace = FALSE)
C sample(x = 1:8, size = 5, replace = FALSE)
D sample(x = c(1,2,3,5,6,7,8), size = 5, replace = TRUE)
E sample(x = c(1,2,3,4,5,6,8), size = 5, replace = FALSE)

Gegeben sei eine Stichprobenrealisation, gespeichert im Vektor sp:

sp <- c(3,6,6,3,8,5,1,6,4,2,8,4,2,8,9)

Sie wenden den Befehl

t.test(sp, mu = 2, conf.level = 0.95)

auf den Vektor sp an und erhalten den folgenden R-Output:

```
        One Sample t-test

data:  sp
t = 4.5826, df = 14, p-value = 0.0004264
alternative hypothesis: true mean is not equal to 2
95 percent confidence interval:
 3.595908 6.404092
sample estimates:
mean of x
        5
```

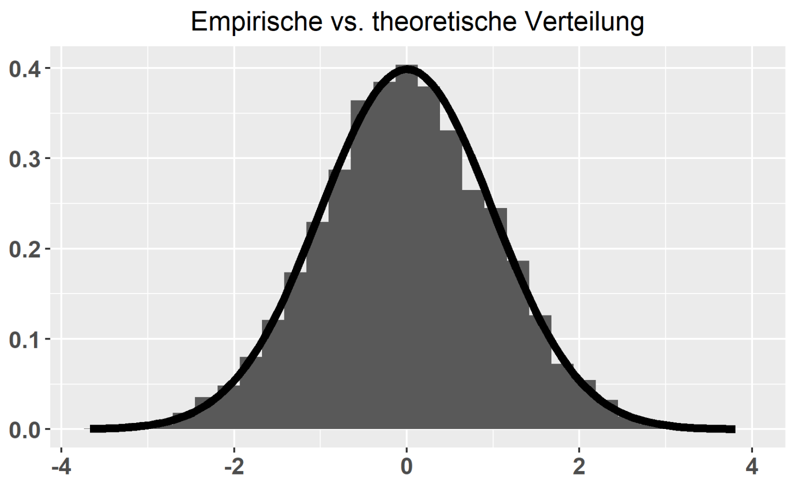
2.5 Welche der folgenden Aussagen zu dem oben implementierten Test auf den Erwartungswert μ ist korrekt?

A Die Stichprobengröße beträgt $n = 14$.
B Die Nullhypothese $H_0: \mu = 2$ wird auf dem 5%-Niveau gegen eine zweiseitige Alternative verworfen.
C Die Nullhypothese $H_0: \mu = 2$ wird auf dem 5%-Niveau gegen eine zweiseitige Alternative nicht verworfen.
D Der Wert von μ beträgt tatsächlich 5.
E Die Differenz zwischen Stichprobenmittel und dem bei der Nullhypothese unterstellten Erwartungswert μ_0 beträgt 4.

Nehmen Sie für die folgenden vier Fragen an, dass Sie keine Datenobjekte (z.B. Values oder Funktionen) abgespeichert haben. Sie haben zudem das Paket *tidyverse* in Ihrer aktuellen Session bereits aktiviert. Sie erzeugen nun mit der folgenden Befehlssequenz einen Dataframe mit zwei Spalten:

```
set.seed(1)
df <- data.frame(x=rnorm(n=10000, mean=0, sd=1),
                 y=rnorm(n=10000, mean=2, sd=3))
```

Im Rahmen Ihrer Analyse ist außerdem das folgende Schaubild entstanden:



2.6 Vervollständigen Sie den nachfolgenden Befehl, um das oben angezeigte Histogramm mit der empirischen Verteilung der Stichprobe aus der Standardnormalverteilung gemeinsam mit der korrespondierenden theoretischen Dichtefunktion zu zeichnen.

```
ggplot(data = df, aes(x = T)) +
  geom_histogram(aes(y=..density..)) +
  stat_function(fun = U, args = list(mean = V, sd = W))
```

A **T**: x, **U**: dnorm, **V**: 0, **W**: 1
B **T**: y, **U**: dnorm, **V**: 2, **W**: 3
C **T**: x, **U**: pnorm, **V**: 0, **W**: 1
D **T**: y, **U**: pnorm, **V**: 2, **W**: 3
E **T**: x, **U**: dnorm, **V**: 2, **W**: 3

2.7 Mit welchem Befehl können Sie das Stichprobenmittel $\bar{x}$ **nicht** bestimmen?
A summary(df$x)
B mean(df$x)
C sum(df$x)/length(df$x)
D sum(df$x)/sum(!is.na(df$x))
E sample(df$x)

2.8 Sie möchten ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für μ_Y berechnen. Vervollständigen Sie den nachfolgenden Befehl um die Intervallgrenzen zu bestimmen:

c(mean(df$y)-qt(p = **U**,df = **V**)*sd(df$y)/sqrt(**W**),
mean(df$y)+qt(p = **U**,df = **V**)*sd(df$y)/sqrt(**W**))

A **U**: 0.975, **V**: 9999, **W**: 10000
B **U**: 0.975, **V**: 10000, **W**: 10000
C **U**: 0.975, **V**: 9999, **W**: 9999
D **U**: 0.95, **V**: 9999, **W**: 10000
E **U**: 0.95, **V**: 10000, **W**: 10000

2.9 Mit welcher der nachfolgend angezeigten Befehlssequenzen können Sie einen neuen Dataframe df2 erzeugen, der nur die Beobachtungen enthält, für die die Werte in der Spalte x positiv sind.
A df2 <- df %>% filter(x>0)
B df2 <- df %<% filter(x>0)
C df2 <- df %>% select(x>0)
D df2 <- df %<% select(x>0)
E df2 <- df %>% summarize(x>0)

Bitte vergessen Sie nicht, Ihre Antworten auf den Antwortbogen zu übertragen und dort auch Ihren Namen, Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer anzugeben.

Aufgabe 3: Freitextaufgaben

Hinweis: Aufgabe 3 besteht aus 12 Teilaufgaben, bei denen insgesamt 39 Punkte erreicht werden können. Verwenden Sie für die Lösung der Aufgaben die durch die Linien begrenzten Lösungsfelder direkt unter dem jeweiligen Aufgabentext. **Nehmen Sie für diese Aufgabe keine Markierungen auf dem Antwortbogen vor.** Falls nötig, runden Sie Ihre Ergebnisse auf **vier Nachkommastellen**.

Die Anzahl der Gäste, die innerhalb einer Stunde in dem Restaurant von Besitzerin Lisa erscheinen, kann durch die Poisson-verteilte Zufallsvariable L mit $\lambda = 4$ dargestellt werden.

3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb einer Stunde mindestens zwei, aber höchstens fünf Gäste das Restaurant betreten. (3 Punkte)

Hinweis: Sie können hierfür die Tabellen der Formelsammlung verwenden.

3.2 Es gilt folgender allgemeiner Zusammenhang: Wenn die Anzahl der Ereignisse pro Zeiteinheit Poisson-verteilt ist mit Parameter λ, dann ist die Wartezeit zwischen zwei solchen Ereignissen exponentialverteilt mit dem gleichen Parameter λ.

Benutzen Sie diese Information, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit der die Wartezeit Z in Stunden zwischen der Ankunft von zwei Gästen in Lisas Restaurant mehr als eine halbe Stunde beträgt. (4 Punkte)

3.3 Verwenden Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit der innerhalb eines Arbeitstages mit 8 Stunden genau 34 Gäste das Restaurant von Lisa besuchen. Definieren Sie hierfür zunächst eine neue Zufallsvariable G, welche die Anzahl der Gäste in Lisas Restaurant pro Arbeitstag misst. (3 Punkte)

Hinweis: Beachten Sie, dass Ihnen die Verteilungstabellen aus der Formelsammlung in diesem Fall nicht weiterhelfen.

3.4 Gehen Sie in den Aufgaben 3.4 und 3.5 – unabhängig von Ihren Überlegungen in Aufgabenteil 3.3 – davon aus, dass die Anzahl der Gäste in Lisas Restaurant pro Arbeitstag dargestellt werden kann durch $G \sim \mathcal{P}(\lambda = 30)$.

Da es in Lisas Restaurant nur ein fixes Menü gibt, betragen die Ausgaben jedes Restaurantbesuchers für Speise und Getränke exakt 40 Euro. Darüber hinaus hat Lisa pro Arbeitstag Ausgaben in Höhe von 500 Euro. Der tägliche Profit von Lisa in Euro, P, kann folglich durch die Zufallsvariable

$$P = a + b \cdot G$$

dargestellt werden.

Bestimmen Sie a und b und berechnen Sie den erwarteten Tagesprofit von Lisa. (5 Punkte)

3.5 Berechnen Sie die Standardabweichung des Tagesprofites von Lisa. (5 Punkte)

3.6 Mark, der Besitzer eines konkurrierenden Restaurants, geht davon aus, dass die stündliche Anzahl seiner Gäste ebenfalls Poisson-verteilt ist und durch die Zufallsvariable X dargestellt werden kann.

Da Mark nur selten vor Ort ist, kennt er den Parameter λ nicht, d.h. $X \sim \mathcal{P}(\lambda = ?)$. Um festzustellen, ob sein Restaurant im Mittel beliebter oder weniger beliebt ist als das von Lisa, möchte er den Wert von λ auf Basis einer *i.i.d.*-Stichprobe, $X_1, \ldots, X_n$, schätzen.

Stellen Sie **allgemein** die Likelihoodfunktion im Falle einer Poissonverteilung auf. Nennen Sie die Annahme, die Sie zum Aufstellen der Likelihoodfunktion benötigen. (3 Punkte)

3.7 Erklären Sie **in einem Satz**, wieso man anstatt der Likelihoodfunktion typischerweise die Log-Likelihoodfunktion maximiert. (1 Punkt)

3.8 Zeigen Sie, dass die Log-Likelihoodfunktion einer Poisson-verteilten Zufallsvariable die folgende Form hat:

$$\ln(L(\lambda)) = \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i!)$$

(4 Punkte)

3.9 Maximieren Sie die Log-Likelihoodfunktion und leiten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ her. (3 Punkte)

3.10 Gehen Sie in den nachfolgenden Aufgaben – unabhängig von Ihrem Ergebnis in Aufgabenteil 3.9 – davon aus, dass $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer ein erwartungstreuer Schätzer für den unbekannten Parameter ist. (4 Punkte)

3.11 Mark entschließt sich dazu, sein Restaurant einen Tag lang zu besuchen. Dabei beobachtet er die folgende Anzahl an Gästen über die acht Arbeitsstunden hinweg: $\{5, 4, 2, 4, 5, 5, 3, 4\}$.

Berechnen Sie auf Basis der Stichprobenrealisation den konkreten Schätzwert von λ. Wie interpretieren Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich der durchschnittlichen Beliebtheit der Restaurants von Lisa und Mark? (3 Punkte)

3.12 Nennen Sie den Test, mit dem Sie überprüfen können, ob die Stichprobe tatsächlich aus einer Poisson-verteilten Grundgesamtheit stammt. (1 Punkt)

Musterlösung

Bachelorprüfung Statistik, WiSe 2020/21

1.1	□ A ■ B □ C □ D □ E
1.2	□ A □ B ■ C □ D □ E
1.3	□ A □ B □ C □ D ■ E
1.4	□ A ■ B □ C □ D □ E
1.5	□ A □ B ■ C □ D □ E
1.6	□ A ■ B □ C □ D □ E
1.7	□ A ■ B □ C □ D □ E
1.8	□ A ■ B □ C □ D □ E
1.9	■ A □ B □ C □ D □ E
1.10	□ A ■ B □ C □ D □ E
1.11	■ A □ B □ C □ D □ E
1.12	■ A □ B □ C □ D □ E
1.13	□ A □ B □ C ■ D □ E
1.14	□ A □ B ■ C □ D □ E
1.15	□ A □ B ■ C □ D □ E
1.16	□ A □ B ■ C □ D □ E
1.17	□ A □ B □ C □ D ■ E
1.18	□ A □ B □ C ■ D □ E
2.1	■ A □ B □ C □ D □ E
2.2	□ A □ B □ C □ D ■ E
2.3	□ A □ B ■ C □ D □ E
2.4	■ A □ B □ C □ D □ E
2.5	□ A ■ B □ C □ D □ E
2.6	■ A □ B □ C □ D □ E
2.7	□ A □ B □ C □ D ■ E
2.8	■ A □ B □ C □ D □ E
2.9	■ A □ B □ C □ D □ E

3.1

$P(2 \leq L \leq 5) = P(L \leq 5) - P(L \leq 1)$
$= F(5) - F(1) = 0.7851 - 0.0916 = 0.6935$

3 Punkte. Wahrscheinlichkeit umformulieren (2 TP) und ausrechnen (1 TP). Alternative Lösung über Wahrscheinlichkeitsfunktion möglich.

3.2

$L \sim \mathcal{P}(\lambda = 4) \Rightarrow Z \sim \mathcal{E}(\lambda = 4)$

$P(Z > 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - (1 - e^{-4 \cdot 0.5}) = e^{-2}$
$= 0.1353$

4 Punkte. Je 1 TP Abzug für jeden falschen bzw. fehlenden Schritt.

3.3

$G \sim \mathcal{P}(\lambda = 8 \cdot 4 = 32)$

Es folgt $P(G = 34) = \frac{\lambda^g e^{-\lambda}}{g!} = \frac{32^{34} e^{-32}}{34!} = 0.0642$

3 Punkte. Je 1 TP Abzug für jeden falschen bzw. fehlenden Schritt.

3.4

$G \sim \mathcal{P}(\lambda = 30) \Rightarrow E(G) = 30$ und $V(G) = 30$

$E(P) = E(a + b \cdot G) = E(-500 + 40 \cdot G)$
$= -500 + 40 \cdot E(G) = -500 + 40 \cdot 30 = 700$

5 Punkte. Korrekte Wahl von a und b (1 TP). Umformung des Erwartungswertes (2 TP), Einsetzen von E(X) (1 TP), Endergebnis (1 TP).

3.5

$V(P) = V(-500 + 40 \cdot X) = 40^2 \cdot V(G)$
$= 40^2 \cdot 30 = 48000$

$\sqrt{V(P)} = \sqrt{48000} = 219.089$

5 Punkte. Einsetzen in Varianz (1 TP), Umformung inkl. 40 quadrieren (2 TP), Varianz berechnen (1 TP), Standardabweichung berechnen (1 TP).

3.6

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{X_i} e^{-\lambda}}{X_i!}$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Stichprobenvariablen unabhängig sind.

3 Punkte. Je 1 TP Abzug für jeden falschen bzw. fehlenden Schritt.

3.7

Die Log-Likelihoodfunktion ist meist einfacher zu optimieren als die Likelihoodfunktion und die Lage des Maximums ändert sich dadurch nicht.

1 Punkt.

3.8

$$\ln(L(\lambda)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{X_i} e^{-\lambda}}{X_i!}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda^{X_i} e^{-\lambda}}{X_i!}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(\lambda^{X_i}\right) + \ln(e^{-\lambda}) - \ln(X_i!)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i \ln(\lambda) - \lambda - \ln(X_i!))$$

$$= \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i!)$$

4 Punkte. Logarithmieren (1 TP), als Summe ausdrücken (1 TP), Umformung (2 TP).

3.9

$$\frac{\partial \ln(L(\lambda))}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i - n \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

3 Punkte. Ableiten (1 TP), gleich Null setzen (1 TP), nach $\hat{\lambda}$ auflösen (1 TP).

3.10

$$E(\hat{\lambda}_{ML}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \lambda = \lambda$$

4 Punkte. 1 TP pro Rechenschritt.

3.11

$$\hat{\lambda}_{ML} = \bar{x} = \frac{1}{8} \cdot (5+4+2+4+5+5+3+4) = 4$$

Da $L \sim \mathcal{P}(\lambda = 4)$ und $X \sim \mathcal{P}(\hat{\lambda}_{ML} = 4)$ haben die Restaurants von Lisa und Mark im Mittel gleich viele Besucher und scheinen somit gleich beliebt zu sein.

3 Punkte. Rechnung (2 TP) und Interpretation (1 TP).

3.12

Mit einem χ^2-Anpassungstest.

1 Punkt.